**Лекция 20**

*Сопряженные пространства*

*–* векторное пространство над полем , где – векторное пространство над полем или любым его подполем.

*Линейная функция (линейный функционал)* на – отображение такое, что

*-* дуальное (двойственное или сопряженное) к , если

Рассматривая одновременно и , элементы - контравариантные векторы (векторы), а - ковариантные вектора (ковекторы).

Когредиентные векторы – векторы одинаковой природы. Контраградиентные векторы – векторы разной природы.

Пусть – конечномерное векторное пространство с базисом – элемент , такой что , где . Отсюда следует, что сопоставляет каждому вектору пространства его -тую координату в заданном базисе. В силу , то можно дать другое описание функционала :

*-* условие сопряженности

**Теорема:** Последовательность – базис .

**Следствие:**

Пусть – ещё один базис в , связанный с другим базисом формулами .

Если евклидово, а базисы ортонормальны, то матрица ортагональна.

Выразив один базис через другой, можем получить связь между базисами.

раз ковариантный или раз контравариантный тензор (тензор валентности ) – линейная по каждому аргументу функция . Такой тензор смешанный типа . Тензор – контравариантный, а – ковариантный.

*Координатное представление тензора*

и – базисы векторного пространства , а и – базисы (дуальными исходными) сопряженного векторного пространства .

Рассмотрим тензор типа (2,1): и обозначим как . Каждая величина в зависит от: выбора тензора, выбора базиса, выбора номеров у вектора основного базиса и ковекторов дуального базиса.

Величины – координаты тензора в базисе .

Выразив через новый базис, получим: .

Аналогично можно получить: .

Задан тензор типа , если в каждом базисе задан упорядоченный набор из чисел, причём любые два набора в двух разных базисах связаны формулами .

Данные два определения тензоров равносильны:

* Пусть дан тензор в первом определении – как полилинейное отображение, тогда каждой системе координат (базису ) можно сопоставить набор , изменяющийся при переходе к другому базису по формулам , т.е. дан тензор во втором определении.
* Обратно, пусть даны наборы чисел в базисах, согласованные по

В каком-то базисе с набором строим полилинейное отображение (тензор в первом определении) по формулам

Если мы проделаем то же в другом базисе с другим набором , связанным с первым вышеописанными формулами, то придем к тому же полилинейному отображению.

*Примеры тензеров*

* Ковектор, рассматриваемый как линейный функционал на , есть тензор типа (1,0), т.е. .
* Вектор, рассматриваемый как линейный функционал на , есть тензор типа (0,1), т.е. .
* Спаривание (естественное или каноническое) между и – билинейное отображение такое, что . Величину обозначают .   
  Свойства: билинейность, невырожденность.  
  Спаривание, рассматриваемое как билинейная функция ковектора и вектора есть тензор типа (1,1), т.е. .
* Линейный оператор , тензор – это матрица оператора в данном базисе, закон для нее известен из алгебры.

Тензор называют симметричным по (кососимметричным по ), если (соответственно, ). В частности, дважды ковариантный тензор симметричен, если и кососимметричен, если .

*Алгебраические операции над тензорами*

* Сложение и умножение на число

Сложение определено для тензоров одинакового типа. Пусть – тензоры; – числа, тогда тензор определяется

* *Умножение*

Определяется для любых двух тензоров. Если используется первое определение тензора (полилинейная функция), то следует оговорить, что аргументы первого тензора независимы от аргументов второго. Если – и – тензоры, то .

Так определенная функция является – тензором.

Пусть , тогда , т.е. .

* *Свёртка*

Пусть - – тензор, а – его значение. Пусть – постоянный вектор, а – постоянный ковектор, тогда определяет – тензор. Сумма есть полилинейная функция остальных аргументов, т.е. – тензор. Этот тензор не зависит от выбора базиса при его построении.

Тензор называется сверткой тензора по аргументам . Свертка определена по любой паре контрагредиентных аргументов. Процесс свертывания можно продолжать до тех пор, пока остаются в получающемся тензоре пары контрагредиентных аргументов. Если число когредиентных и контрагредиентных аргументов исходного тензора одинаковы, то свертка по всем парам даст число, называемое следом тензора . О свертывании двух тензоров говорят, когда свертывается их произведение по аргументам, каждое из которых входит в один из сомножителей.

Если , а – его свертка по -му вектору и -му ковектору, то